Fondamento della congettura. Il principio di Cavalieri

Giuseppe Terregino

IL POSTULATO DI BONVENTURA CAVALIERI RAPPRESENTA UNA TAPPA FONDAMENTALE NELLA STORIA DELLA MATEMATICA PER L'ELABORAZIONE DEL CALCOLO INFINITESIMALE.

Una delle affermazioni ritenute più ovvie nella matematica elementare è il postulato di Bonaventura Cavalieri sulla equivalenza delle figure solide (nei corsi scolastici di geometria lo si enuncia solo in relazione a queste). Tanta sembra la sua evidenza che lo si assume come principio.

In relazione ad essa, al fine di rendere il discorso più efficace, si sogliono presentare i solidi come pile di fogli sovrapposti e si suggerisce di potere ritenere evidente la loro equivalenza quando essa risulti verificata per gli elementi che li compongono. Il caso didatticamente più rinomato è quello della "scodella" detta "di Galileo" a motivo dell'entusiastica trattazione che lo scienziato pisano ne fa in una famosa pagina dei *Discorsi intorno a due nuove scienze* (Giornata I), ove loda il metodo di Cavalieri, facendo dire a Sagredo che «parrebbe un mezzo sacrilegio lacerare si bella struttura con qualche pedantesco affronto».

Galileo, si sa, è un genio e il genio coglie in un lampo realtà da cui il soggetto comune teme di essere soverchiato. A lume di logica, però, il metodo degli indivisibili, anche se didatticamente efficace, è tuttavia inficiabile. Al punto da esserne convinto lo stesso padre dell'atomismo, Democrito, il quale fa notare come sia facile cadere in contraddizione quando si voglia pensare il continuo geometrico composto da elementi indivisibili (atomi) omogenei con la grandezza data.

> Se un cono viene secato da un piano parallelo alla base, come si dovranno immaginare – egli si chiede – le superfici di separazione? Verranno uguali o disuguali? Perché, se verranno disuguali renderanno irregolare il cono, che verrà ad avere tante incisioni e scabrosità; ma se saranno uguali le superfici, saranno uguali anche le sezioni e il cono verrà ad assumere l'aspetto del cilindro, in quanto risultante dalla sovrapposizione di cerchi uguali e non disuguali; il che è sommamente assurdo[1].

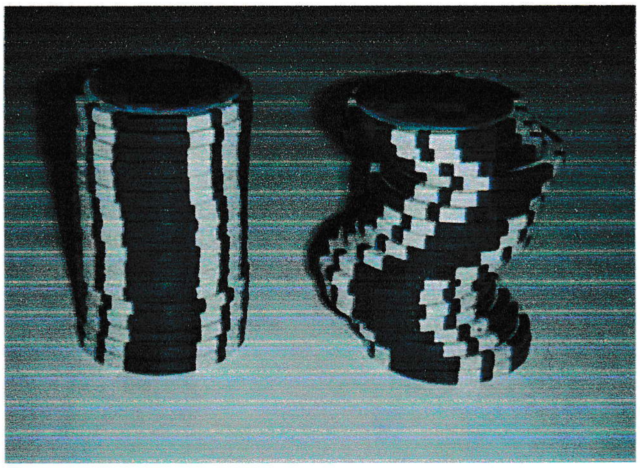
È evidente in questa argomentazione l'ipotesi del movimento continuo e non a scatti di un piano parallelo alla base del solido; il che equivale ad ammettere che nella figura non vi siano soluzioni di continuità, come sarebbe, invece, nel caso in cui essa fosse costituita da elementi indivisibili sovrapposti.

A prudenza induce anche il comportamento di Archimede. Questi, infatti, benché utilizzi – come riferisce in un famoso scritto sul Metodo[2] – indirizzato ad Eratostene – la maniera di "trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche", si guarda bene dall'attribuire a tale metodo forza dimostrativa, tanto che se ne giova solo in fase euristica, badando poi a corroborare le sue scoperte con dimostrazioni ritenute canoniche.

Gli indivisibili

Tali rilievi critici vanno riferiti, però, al consueto modo di illustrare il postulato di Cavalieri, non alla ratio cavalieriana in sé, né agli indivisibili a cui in essa si fa riferimento. I quali non sono elementi in senso proprio dei continui geometrici presi in considerazione, ma entità (dimensionalmente e sostanzialmente diverse) ad essi, di volta in volta, associate.

1. L'attribuzione a Democrito del brano riportato è di Plutarco. La traduzione è quella che viene data a pag. 170 de *Le origini del pensiero scientifico* di G. De Santillana, Sansoni, Firenze 1966. A prescindere dall'ambiguità di certi termini, usati in senso traslato, appare chiaro come in esso venga sottolineata la problematicità di una concezione atomistica del continuo geometrico. Il che sorprende non poco se si pensa che l'autore è noto soprattutto per il suo atomismo; ma fa anche lecitamente supporre che in Democrito fosse netta la distinzione tra la realtà fisica e quella (intellettuale) delle grandezze geometriche.
2. Il *Metodo* di Archimede fu scoperto da J. L. Heiberg a Costantinopoli, in un palinsesto, nel 1906. Questa data fa escludere che Cavalieri se ne siaservito nell'elaborare la sua *Geometria*. La quale risulta pertanto opera originale. In proposito va pure citato il volume di Reviel Netz e William Noel, *Il codice perduto di Archimede*, RCS Libri, 2007, ove si tratta del modo casuale e insieme sorprendente del ritrovamento di tale codice, che era addirittura il supporto di alcune pagine di preghiere scritte in epoca medievale.



Cavalieri – come giustamente fa notare L. Lombardo-Radice – «non asserisce mai che un continuo è *somma* dei suoi indivisibili (punti, segmenti e regioni piane)»[3] Al contrario, in risposta alle aspre critiche contro il suo presunto atomismo, ribadisce «assolutamente io non mi dichiaro dì componere il continuo d'indivisibili, ma solo mostro che i continui hanno la proporzione degli aggregati di questi indivisibili»[4].

Ecco il punto: altro sono ontologicamente le figure, altro gli aggregati degli indivisibili ad esse associati, ossia gli insiemi costituiti dalle loro sezioni secondo una determinata direzione (nel piano) o secondo una data giacitura (nello spazio). Insiemi, questi, legittimamente pensabili, ma non necessariamente identici, nella sostanza, alle figure cui vengono riferiti.

C'è semmai da imputare a Cavalieri una certa improprietà di linguaggio nell'uso del termine *indivisibili*, stante che con tale nome vengono indicate entità di una dimensione in meno, e quindi ontologicamente diverse, rispetto alle figure alle quali appartengono.

Per la verità, Cavalieri non usa tale termine sistematicamente. Di solito usa, infatti, le espressioni *tutte le linee* (per le figure piane) e *tutti i piani* (per i solidi). Dove non può ravvisarsi ambiguità di sorta circa l'assunto fondamentale della sua ratio, che consiste nell'ammettere il rapporto delle figure uguale a quello degli aggregati di *tutte le linee* o di *tutti i piani* ad esse associati secondo un opportuno riferimento.

Ma quell'uso, anche se accidentale e ingenuo, che egli fa di un termine aborrito dalla cultura ufficiale, avversa all'atomismo di ogni specie, basta per rendere plausibile la polemica nei suoi confronti e giustificare il rifiuto della sua geometria. La quale è per altro certamente eterodossa in un contesto alieno dall'ammettere l'infinito attuale a cui inevitabilmente conducono gli aggregati dei suoi indivisibili.

La composizione del continuo

Per tirarsi fuori da una polemica (quella sulla composizione del continuo, per l'appunto) alla quale si ritiene estraneo e rendere accetto il proprio modo di promuovere la geometria ai molti probabili obiettori contro l'infinità attuale dei suoi indivisibili, a un certo punto cambia radicalmente il punto di vista, applicando il suo metodo in riferimento agli indivisibili considerati non collettivamente, ma *singulatim* e in corrispondenza biunivoca. Ciò è quanto si propone con l'aggiunta di un settimo libro alla sua Geometria, dove ritrova, per altra via, le acquisizioni dei primi sei libri sulla base del seguente postulato, indicato nel testo originale col duplice titolo di teorema e di proposizione.

> Figure piane quali si vogliano, collocate tra le medesime parallele, nelle quali – condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione – le porzioni intercette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro. E figure solide quali si vogliano, collocate tra i medesimi piani paralleli, nelle quali – condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli – le figure piane generate nei solidi stessi da uno qualsivoglia dei piani condotti sono uguali, saranno del pari uguali tra di loro[5].

Così il metodo cavalieriano viene a prescindere dalla composizione del continuo, giacché neppure in senso meramente insiemistico – come avveniva, invece, quando erano considerati collettivamente – i cosiddetti indivisibili possono essere ritenuti elementi in senso proprio di aggregati in qualche modo assimilabili alle figure di appartenenza.

Non cadono però tutte le difficoltà insite nel far discendere il rapporto delle figure da quello di particolari loro sezioni. Difficoltà ravvisate dallo stesso Cavalieri all'inizio della sua ricerca, quando si era dovuto rendere conto che l'idea di un trasferimento dell'equivalenza dalle sezioni alle figure non era applicabile incondizionatamente, stante l'esempio contrario dei solidi di rotazione in corrispondenza con le rispettive sezioni meridiane.

> Per esempio un cilindro, che sia ottenuto insieme ad un cono, della stessa base, per rotazione attorno a un medesimo asse, è il triplo di esso, mentre tuttavia nasce per rivoluzione di un parallelogramma doppio[6].

3. B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, a cura di L. Lombardo - Radice, UTET, Torino 1966, p. 25.
4. B. Cavalieri, *Lettera a Galileo da Bologna del 2 ottobre 1634*, Ibi, p. 757
5. B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, a cura di L. Lombardo - Radice, UTET, Torino 1966, p. 654
6. Ibi, p. 46

Analoghi sorprendenti risultati si avrebbero – aggiunge – confrontando una semisfera con un conoide parabolico costruiti "con la stessa base e attorno allo stesso asse", nonché con un cilindro, il quale

> sarà una volta e mezza la semisfera, mentre tuttavia il parallelogrammo che genera il detto cilindro starà alla circonferenza generatrice inscritta all'incirca come 14 sta a 11, [...][7].

Le obiezioni in merito, prodotte anche con acume dai critici del metodo degli indivisibili, erano state rimosse introducendo la condizione imprescindibile che tra gli insiemi di *tutte le linee* e di *tutti i piani* delle figure a raffronto fosse posta la corrispondenza biunivoca degli elementi equidistanti dai rispettivi termini di riferimento.

Tale condizione è implicitamente ammessa nella proposizione (1 del VII libro) sopra riportata. Si tratta quindi di far vedere come l'assunto in essa contenuto abbia un fondamento razionale, a cui può essere ricondotta la certezza delle conclusioni dedotte dalla medesima.

Cominciamo col ritenere acquisito per altra via (come è possibile, anche se poco agevole) il fatto che due solidi prismatici o cilindrici di basi equivalenti e con la medesima altezza siano a loro volta equivalenti. Consideriamo quindi due qualunque solidi rispondenti alla ipotesi del postulato di Cavalieri e operiamo su di essi una arbitraria suddivisione per mezzo di n piani paralleli ai due tra i quali essi si considerano compresi. Essendo a due a due equivalenti le sezioni di questi piani coi solidi, tali saranno anche, a due a due, i prismoidi o cilindroidi compresi in un medesimo strato e aventi per basi le sezioni determinate dalla faccia inferiore di questo; e di conseguenza equivalenti (somme di figure equivalenti sono equivalenti) risulteranno le loro somme, che per comodità chiamiamo pluriprismi o pluricilindri, a seconda del contorno delle sezioni considerate. Nel passaggio al limite, al tendere di n all'infinito, col tendere a zero dello spessore di ciascuno degli strati considerati, i due pluriprismi (o pluricilindri) come sopra determinati, tendono ai due solidi; i quali, pertanto risultano equivalenti.

La precedente dimostrazione (senza alcuna pretesa di rigore logico) rende in qualche modo ragione sia del successo della congettura di Cavalieri, assurta nella didattica al ruolo di principio, che dei limiti della sua validità, ossia delle condizioni imprescindibili perché si possa identificare il rapporto delle figure con quello delle rispettive sezioni.

Essa è in sostanza una variante di quella data dallo stesso Cavalieri nella *Geometria* e ribadita nelle *Exercitationes* (per le figure solide); in riferimento alla quale si può ben dire che egli anticipi i procedimenti propri del calcolo integrale più di quanto non lo si possa dire per gli insiemi dei suoi indivisibili, che nulla invece hanno a che vedere con gli infinitesimi potenziali caratteristici di tali procedimenti.

Per Cavalieri, però, la verità della sua proposizione basilare, che egli ritiene un assioma, benché la connoti anche come teorema, sarebbe soprattutto, e inequivocabilmente, provata dal fatto che ne discendono conclusioni universalmente considerate certe perché dimostrate canonicamente.

Un tale criterio di verità, che rimanda alle conclusioni la verifica di un assunto assiomatico, non è proprio delle scienze deduttive, dove, viceversa, sono da ritenersi vere le conclusioni coerenti con le basi assiomatiche. Esso acquista senso, nel nostro caso, se si ritiene – come l'Agazzi – che Cavalieri, in contrasto con quanto sostenuto in teoria, si sia comportato in pratica in modo sostanzialmente non dissimile da quello dei successivi fondatori del calcolo infinitesimale "agendo intuitivamente come se le figure piane fossero somme di rette componenti"[8] e le figure solide come somme di elementi di superfici piane.

A siffatto modo di considerare gli indivisibili cavalieriani va fatto risalire il consueto punto di vista adottato – come abbiamo detto all'inizio – in sede didattica. E probabilmente non è il caso di contrastarlo, se non altro perché consente una trattazione semplice ed efficace della equivalenza dei solidi.

Può essere, tuttavia, didatticamente significativa una valutazione critica dell'intera questione, almeno per due motivi. Primo, per dare a Cavalieri il merito di una considerazione dell'infinito attuale che precorre di oltre un paio di secoli l'analisi condotta in ambito matematico in tempi relativamente recenti. E poi, per sostanziare gli studi umanistici del patrimonio di idee sorte e sviluppatesi nel processo evolutivo del pensiero scientifico.

Giuseppe Terregino
Docente di scuola secondaria
~~*Saverio Mauro Tassi*~~
~~*Liceo "Albert Einstein", Milano*~~

7. Ibidem.
8. E. Agazzi, *La ricomparsa di Bonaventura Cavalieri*, in «Periodico di Matematiche», 1967, I voll, p. 7.